# 2 ع ت الأعداد العقدية

## 1. مجموعة الأعداد العقدية :

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز C و تحقق :

. $R \subset C$

. العمليات الجبرية في C هي امتداد للعمليات في R .

. تحتوي على عدد غير حقيقي يكتب i ويحقق $i^2=-1$ .

. كل عنصر z من C يكتب بكيفية وحيدة على شكل: a+ib حيث a و b من R .

**مصطلحات :**

. كل عنصر من C يسمى عدد عقدي

. المجموعة C تسمى مجموعة الأعداد العقدية .

. الكتابة z=a+ib تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z .

. العدد الحقيقي a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونرمزه $a=\mathrm{Re}(z)$ .

. العدد الحقيقي b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونرمزه $b=\mathrm{Im}(z)$ .

**خاصية : ( الشكل الجبري والعمليات في مجموعة الأعداد العقدية :**

ليكن a و b و c و d أعداد حقيقية .

. $a+ib=0 \Leftrightarrow a=b=0$

. $a+ib=c+id \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

. $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

## 2. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى المزود بمعلم م م م $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى المستوى العقدي

**تعريف : ( اللحق و الصورة )**

. نعتبر عددا عقديا $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in R^2$ .

. النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد z و نرمز لها بالرمز $M(z)$ .

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق $M(a,b)$ ويكتب $z_M$ .

. المتجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ تسمى المتجهة الصورة للعدد z ونرمز لها بالرمز $\vec{u}(z)$ .

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونرمز له ب $z_{\vec{u}}$ .

**خاصية : ( اللحق و العمليات )**

. لحق نقطة M هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$

. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

. $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$

. $z_{\vec{u}}=z_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$

لحق المتجهة $\alpha\vec{u}$ هو $\alpha z_{\vec{u}}$

**تعريف : ( المرافق )**

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا حيث $x$ و $y$ عددان حقيقيان .

العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z ويرمز له بالرمز $\bar{z}$

**خاصية : ( المرافق والعمليات )**

ليكن $z_1$ و $z_2$ عددين عقديين .

. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

. $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$

. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2\neq 0)$

. $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

**تعريف : ( المعيار )**

ليكن z=a+ib عددا عقديا مع $(a,b)\in R^2$

العدد الحقيقي $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد z ونرمز له بالرمز $|z|$

**ملاحظة :**

. ليكن z عدد اعقديا و M صورته في المستوى العقدي : لدينا $OM=|z|$

. لتكن A و B نقطتين الحاقها على التوالي $z_A$ و $z_B$ لدينا: $AB=|z_B-z_A|$

. $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$

**خاصية : ( المعيار و العمليات )**

. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ حيث $z_2\neq 0$ ، $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ .

. $|z^n|=|z|^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

**تعريف : ( العمدة )**

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته $(O\neq M)$

المتجهتان $\vec{e}_1$ و $\overrightarrow{OM}$ الغير منعدمتين تحددان زاوية موجهة

كل قياس للزاوية $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})$ نسميه عمدة العدد z ونرمز له ب $\arg(z)$

ولدينا $\arg(z)\equiv(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

**خاصية : ( العمدة و العمليات )**

ليكن $z_1$ و $z_2$ عددين عقديين غير منعدمين

. $\arg(\bar{z}_1)\equiv-\arg(z_1)\ \ [2\pi]$

. $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\ \ [2\pi]$

. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\ \ [2\pi]$

. $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)\ \ [2\pi]$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

# 2 ع ت الأعداد العقدية

خاصية: ( قياس الزوايا )

لتكن A و B و C و D اربع نقط من المستوى الحاقها على التوالي :

$z_A$ و $z_B$ و $z_C$ و $z_D$

. $(\vec{e_1},\overrightarrow{OA})\equiv\arg(z_A)\ [2\pi]$ حيث $O\neq A$

. $(\vec{e_1},\overrightarrow{AB})\equiv\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$

. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$ و $A\neq C$

. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$ و $D\neq C$

## 3.الشكل المثلثي :

خاصية : ( الشكل المثلثي )

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $|z|=r$ و $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$.

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل المثلثي.

ترميز :

نرمز أيضا للكتابة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ بالرمز $[r,\theta]$.

خاصية : ( العلاقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي )

$$z=a+ib=[r,\theta]\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2}\\ \cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{cases}$$

خاصية : ( الشكل المثلثي و العمليات )

لتكن $r$ و $r'$ عددين حقيقيين موجبين قطعا و $\theta$ و $\theta'$ عددين حقيقيين

. $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$ و $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$

. $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$

. $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

. $[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$ حيث $n\in Z$

خاصية : ( صيغة موافر )

لكل $n$ من $\mathbb{N}$ و $\theta$ من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

$$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$$

## 4.الترميز الاسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف : ( الرمز $e^{i\theta}$ )

لكل عدد حقيقي $\theta$ نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ للعدد العقدي $[1,\theta]=\cos\theta+i\sin\theta$

خاصية : ( الترميز الاسي والعمليات )

ليكن $\alpha$ و $\theta$ عددين حقيقيين

. $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، $e^{i\theta}e^{i\alpha}=e^{i(\theta+\alpha)}$

. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}}=e^{i(\theta-\alpha)}$ ، $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ حيث $n\in Z$

خاصية : ( الترميز الاسي لعدد عقدي )

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل : $z=re^{i\theta}$ حيث

$|z|=r$ و $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$

. نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل الاسي

تعريف : ( صيغتا اولير )

لكل عدد حقيقي $\theta$ الصيغتان:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

و

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

تسميان صيغتا اولير

## 5.المعادلات من الدرجة الثانية :

خاصية : ( المعادلات من الدرجة الثانية )

$S$ مجموعة حلول المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم. مميز المعادلة $\Delta=b^2-4ac$

. اذا كان $\Delta\succ0$ فان : $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta=0$ فان : $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta\prec0$ فان : $S=\left\{\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a},\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

خاصية : ( العلاقة بين المعاملات و الجذور )

ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي للمعادلة $az^2+bz+c=0$

حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

لدينا : $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$

$z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

# 2ع ت — الأعداد العقدية

## 6.تطبيقات هندسية للاعداد العقدية :

### خاصية : ( الاستقامية – التوازي – التعامد – التداور )

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة مثنى مثنى .

. تكون A و B و C مستقيمية اذا وفقط اذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in R$

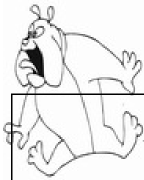
. $(AB)//(DC)$ يكافئ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in R$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \ [\pi]$

. $(AB)\perp(DC)$ يكافئ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in iR$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

. النقط A و B و C وDمتداورة يكافئ $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \cdot \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in R$



### خاصية : ...طبيعة مثلث

. ABC مثلث قائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in iR$

. ABC مثلث متساوي الساقين في A يكافئ $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

. ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$

. ABC متساوي الأضلاع يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

### خاصية: .... طبيعة رباعي

. ABCD متوازي الأضلاع يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$

. ABCD مستطيل يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AB)\perp(AD)$

. ABCD معين يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AC)\perp(BD)$

. ABCDمربع يكافئ ABCD مستطيل و AB=AC

يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \pm i$

### خاصية: ..... التحويلات الإعتيادية

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ .

. الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z' = z + z_{\vec{u}}$

. الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k هي :

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

. الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته $\theta$ هي :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

### علاقات في الحساب المثلثي:

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

| $x$ بالراديان | $\cos x$ | $\sin x$ | $\tan x$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| $\pi/6$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| $\pi/3$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/2$ | 0 | 1 | غير معرف |
| $2\pi/3$ | $-1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}$ |
| $3\pi/4$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $-1$ |
| $5\pi/6$ | $-\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $-\sqrt{3}/3$ |
| $\pi$ | $-1$ | 0 | 0 |
| $2\pi$ | 1 | 0 | 0 |

| | |
|---|---|
| $\cos(\pi + x) = -\cos x$<br>$\sin(\pi + x) = -\sin x$<br>$\tan(\pi + x) = \tan x$ | $\cos(-x) = \cos x$<br>$\sin(-x) = -\sin x$<br>$\tan(-x) = -\tan x$ |
| $\cos(x + 2\pi) = \cos x$<br>$\sin(x + 2\pi) = \sin x$<br>$\tan(x + 2\pi) = \tan x$ | $\cos(\pi - x) = -\cos x$<br>$\sin(\pi - x) = \sin x$<br>$\tan(\pi - x) = -\tan x$ |

| | |
|---|---|
| $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$<br>$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$<br>$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$<br>$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$<br>$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ |

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$